Analysis Summary

Leon Muscat

January 29, 2023

Contents

Chapter 1

Zahlenmengen

1.1 Natürliche Zahlen

Menge der natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und mit 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

1.2 Ganze Zahlen

Menge der ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

1.3 Rationalen Zahlen

Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | q \neq 0 \text{und} p(\text{Zähler}), q(\text{Nenner}) \in \mathbb{Z}\}$

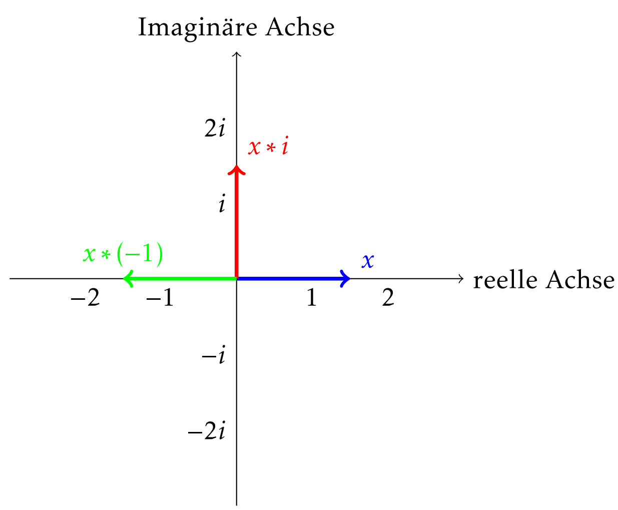
1.4 Reelle Zahlen

Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$ besteht aus allen Zahlen, die sich beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren lassen, wie $\sqrt{2}$.

1.5 Komplexe Zahlen

Die reellen Zahlen beinhalten alle Zahlen, die man sich vorstellen kann außer $\sqrt{-1}$. Daher stellt man sich die imaginäre Zahl i vor, die definiert ist als $i^2 = -1$.

Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$. Man nennt x den Realteil ($\text{Re}(z) = x$) und y den Imaginärteil ($\text{Im}(z) = y$) der komplexen Zahl $z = x + iy$. Eine komplexe Zahl kann in der Gauß'schen Zahlenebene veranschaulicht werden:



Jede komplexe Zahl z hat eine konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{z} = z^* = x - iy$$

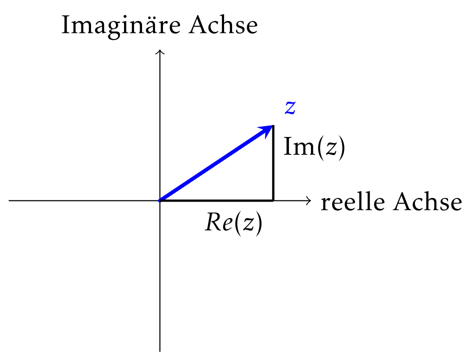
Der Real- und Imaginärteil lassen sich damit als

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

schreiben. Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl ist

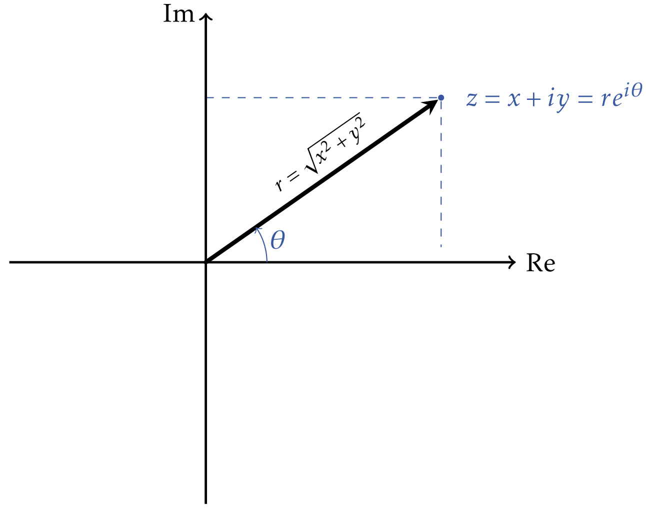
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Das lässt sich durch die Gauß'sche Zahlenebene erklären. Ein Vektor z formt mit seinem Realteil und Imaginärteil ein Dreieck. Die Länge kann dann mit dem Pythagoras ausgerechnet werden:



1.5.1 Eulerform

Komplexe Zahlen lassen sich auch in Polarform bzw. Eulerform darstellen:



$$\theta = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}) & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

$re^{i\theta}$ ist die Darstellung von z in der Polarform. Der Winkel θ wird Argument genannt und gibt die Richtung der komplexen Zahl an. Die reelle Zahl r gibt die Länge der komplexen Zahl an.

Es gelten folgende Rechenregeln für die Polarform einer komplexen Zahl:

1. $z_1 z_2 = (r_1 r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

1.5.2 Wurzel einer komplexen Zahl

Wenn man die Lösungen von $\sqrt{4}$ berechnet, gibt es 2 Lösungen $x_1 = 2, x_2 = -2$. Im gleichen Sinne gibt es mehrere Lösungen, wenn man die Wurzel einer komplexen Zahl zieht $w^n = z$. Dafür gibt es die folgende Formel:

$$w_k = \sqrt[n]{r_z} e^{i(\frac{\theta z}{n} + 2\pi \frac{k}{n})} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

k durchläuft die ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$, danach wiederholen sich die Lösungen. Insgesamt gibt es n Lösungen. Ist $z = 1$ heißen die n Lösungen der Gleichung $w^n = 1$ die n-Einheitswurzel.

1.5.3 Komplexer Logarithmus

Der komplexe Logarithmus ist definiert als

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

$$z = re^{i\theta} \mapsto \log(z) = \ln(r) + i\theta$$

Dadurch kann man jede Potenz z^w für komplexe Zahlen z, w berechnen:

$$z^w = e^{w \log(z)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, w \in \mathbb{C}$$

Falls w eine komplexe Zahl ist (also nicht nur einen Realteil hat), dann ist es besser diese Gleichung umzuschreiben. Für $z = re^{i\theta}$ und $w = u + iv$ gilt:

$$z^w = r^u e^{-v\theta}(\cos(u\theta + v\ln(r)) + i\sin(u\theta + v\ln(r))).$$

Für den Winkel wählt man den Hauptwert $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Jede komplexe Zahl $z = e^{i\theta}$ kann als $z = e^{i(\theta + 2k\pi)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden, wodurch $\theta \in (-\pi, \pi]$. θ ist dann der Hauptwert. Z.B. lässt sich die komplexe Zahl $z = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ auch als $z = e^{i(-\frac{1}{2}\pi - 2\pi)}$ darstellen.

$z = e^{i(-\frac{1}{2}\pi)}$ wird dann der Hauptzweig genannt.

Der komplexe Logarithmus ist nur auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ definiert. Mit dem Hauptzweig nimmt man den Logarithmus $\log(z) = \ln(r) + i\theta$. Da sich aber z alle $2k\pi i$ wiederholt (z.B. $e^{i\pi} = e^{i3\pi}$), gibt es Zweige des Logarithmus. Der k-te Zweig ist durch $\log(z) + 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

1.6 Mächtigkeit von Mengen

Zwei endliche Mengen heißen gleich mächtig, wenn $|A| = |B|$, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen erhalten. Ganz generell heißen zwei nicht notwendigerweise unendliche Mengen A, B gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $F : A \to B$ gibt, die jedem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet und umgekehrt.

Eine Menge, die gleich mächtig wie die natürlichen Zahlen ist, wird als abzählbar bezeichnet. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar. Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar - nicht einmal das reelle Intervall $[0, 1]$ ist es.

Example 1.1 Ganze Zahlen sind abzählbar

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}; n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n gerade \\ -\frac{n-1}{2} & n ungerade \end{cases}$$

1.7 Summen und Produkte

Die Summe von Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ schreibt man abgekürzt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

Gelesen wird das Summensymbol: ”Summe über alle a_k für k gleich 0 bis n”

1.7.1 Rechenregeln

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} c a_k = c \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{jk} =$$

Das Produkt von Zahlen $a_0, \dots, a_n$ schreibt man abgekürzt

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

1.8 Vollständige Induktion / Induktionsprinzip

Die vollständige Induktion ist eine geeignete Methode für den Beweis von Aussagen, die für alle ganzen Zahlen, ab einer bestimmten Zahl formuliert sind.

Sei $A(n)$ eine Aussage für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

1. Induktionsanfang: $A(1) istrichtig$
2. Induktionsschluss: Aus der Richtigkeit von $A(n)$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung) folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$

Dann ist $A(n)$ für alle $n \, in \mathbb{N}$ richtig.

Chapter 2

Funktionen

2.1 Einführung

2.1.1 Abbildung

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge D in eine Menge M weißt jedem Element von $x \in D$ genau ein Element von $f(x) \in M$ zuordnet. Man schreibt dafür:

$$f : D \to M$$

$$x \mapsto f(x)$$

$f(x)$ ist das Bild bzw. der Funktionswert von x. Die Menge D heißt Definitionsbereich, die Menge $f(D) = f(x)|x \in D$ heißt Bildmenge oder Wertebereich und wird M geschrieben. x wird auch die unabhängige Variable oder das Argument genannt und $y(y = f(x))$ wird die abhängige Variable oder der Funktionswert genannt.

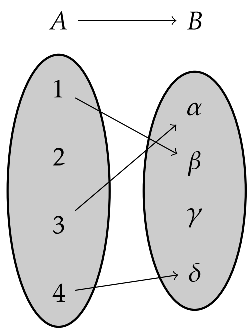
Für eine Teilmenge $B \subseteq M$ können die ursprünglichen Funktionswerte erhalten werden durch $f^{-1}(B) = x \in D|f(x) \in B$. Diese Menge heißt Urbildmenge von B.

Ist f bijektiv, dann ist f^{-1} die Umkehrfunktion oder inverse Funktion von f. f^{-1} macht die Wirkung von f rückgängig. Das heißt: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ und $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Es gilt: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

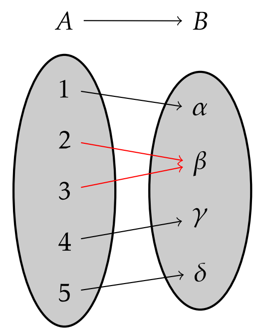
2.1.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Funktion f heißt injektiv, wenn verschiedene Elemente von D auf verschiedene Elemente von $f(D)$ abgebildet werden:

Injektiv

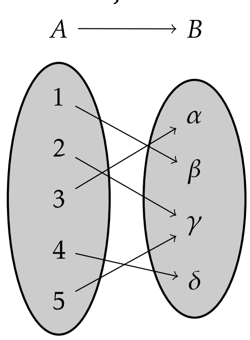


Nicht-injektiv

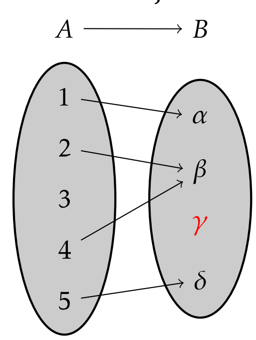


Eine Funktion f heißt surjektiv, wenn jedes Element von M das Bild eines Elements aus D ist, kurz: $f(D) = M$

Surjektiv

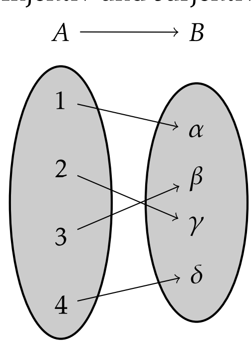


Nicht-surjektiv



Eine Funktion f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist:

Injektiv und surjektiv



Durch geeignete Einschränkung des Definitionsbereichs kann eine Funktion immer injektiv bzw. surjektiv gemacht werden.

2.1.3 Monotonie

Eine Funktion f heißt streng monoton wachsend (oder streng monoton steigend), wenn für wachsende x-Werte stets die zugehörigen Funktionswerte wachsen. Also:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in D$$

.

Eine Funktion f heißt streng monoton wachsend (oder streng monoton steigend), wenn für wachsende x-Werte stets die zugehörigen Funktionswerte wachsen. Also:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in D$$

Wenn anstelle von $<$ und $>$ jeweils $\leq$ und $\geq$ gilt, dann ist die Funktion nur monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Ist eine Funktion streng monoton wachsend oder fallend, dann ist sie injektiv.

Example 2.1 Streng monotone Funktionen

1. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$
2. Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ und die Logarithmusfunktion $f^{-1}(x) = \log_a(x)$

Die Verkettung von zwei gleich monotonen Funktionen ist monoton wachsend. Hingegen die Verkettung von zwei ungleich monotonen Funktionen ist monoton fallend.

2.1.4 Beschränkte Funktionen

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) \leq K \quad \text{für alle } x \in D$$

Man nennt dann K eine obere Schranke von f. Das bedeutet der Funktionsgraph von f liegt immer unterhalb der Geraden $y = K$.

Analog gilt das gleiche für eine nach unten beschränkte Funktion f und die untere Schranke.

f heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Es gilt also

$$k \leq f(x) \leq K \quad \text{für alle } x \in D$$

.

Eine Funktion, die nicht beschränkt ist, heißt unbeschränkt

2.1.5 Symmetrie von Funktionen

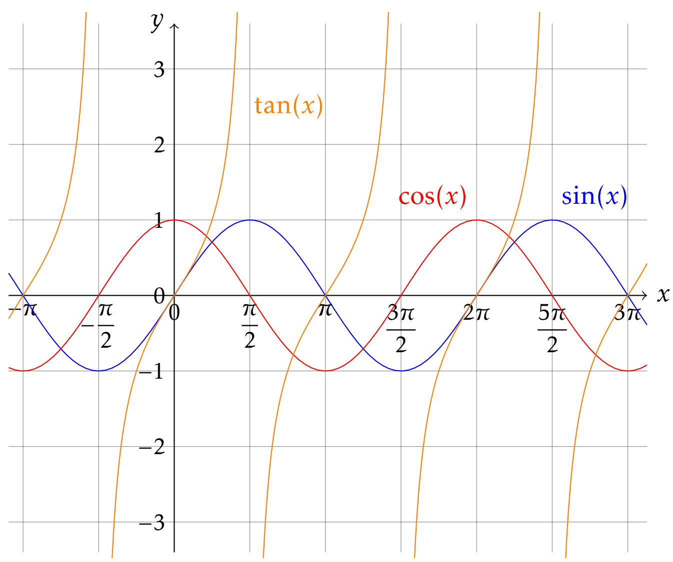
Eine Funktion heißt gerade, wenn die Funktion $f(-x) = f(x)$ erfüllt. Ihr Graph liegt dann symmetrisch zur y-Achse.

Eine Funktion heißt ungerade, wenn sie $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Ihr Graph liegt dann punktsymmetrisch zum Ursprung. Der Graph einer ungeraden Funktion geht durch den Punkt (0|0)

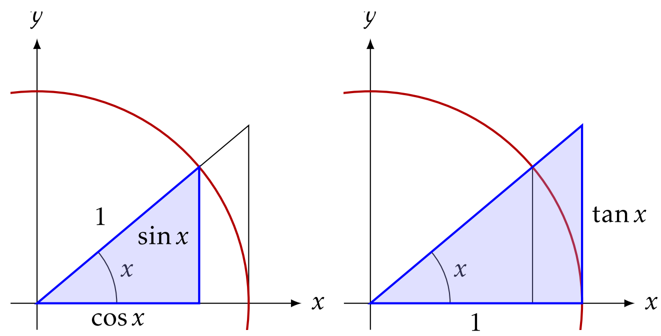
2.1.6 Verkettung von Funktionen

Seien $f : D_f \to M$ und $g : D_g \to N$ Funktion. Die Verkettung von f und g ist die Funktion $f \circ g : D_g \to M$ mit: $x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$

2.2 Trigonometrische Funktionen



Daraus lässt sich herleiten, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Außerdem ist $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. Die Funktionen sin und cos werden daher periodisch genannt, da es eine Zahl p gibt für die gilt $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die kleinste positive Zahl p mit dieser Eigenschaft heißt Periode von f. Für sin und cos ist die Periode 2π.



Ein Winkel lässt sich über die Länge des zugehörigen Kreisbogens angeben. Dies wird Bogenmaß genannt und in Radianten angegeben. Ein Kreis hat ein Bogenmaß von 2π. Daraus lässt sich die Umrechnung zwischen Grad und Bogenmaß herleiten:

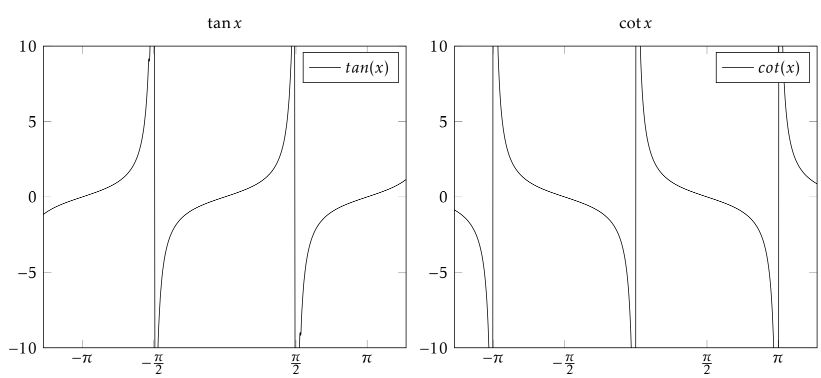
$$\text{Bogenmaß} = \text{Grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$
$$\text{Grad} = \text{Bogenmaß} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Oft werden auch der Tangens und Kotangens verwendet:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos(x) \neq 0$$
$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \qquad \sin(x) \neq 0$$

Der Tangens hat also überall dort Polstellen, wo der $\cos x = 0$, also bei $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$. Der Kotangens hat überall Polstellen, wo der $\sin x = 0$, also bei $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Beide haben also eine Periode von π.



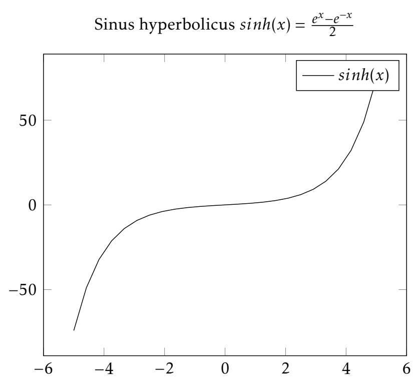
Aus dem Einheitskreis (Radius von 1) lässt sich die Pythagorasbeziehung herleiten:

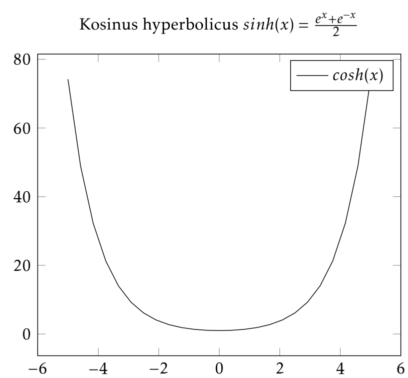
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Diese trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen können bijektiv definiert werden (vergleiche mit Sinus und Cosinus Periode oben. Z.B. hat der sin in dem Bereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für jeden x-Wert ein einzigartiger y-Wert zugewiesen):

1. $\sin : \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \sin(x)$
2. $\arcsin : \quad [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad x \mapsto \arcsin(x)$
3. $\cos : \quad [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \cos(x)$
4. $\arccos : \quad [-1, 1] \to [0, \pi] \qquad x \mapsto \arccos(x)$

2.2.1 Hyperbelfunktionen





Die Hyperbelfunktionen haben folgende Eigenschaften:

1. $\sinh(0) = 0, \cosh(0) = 1$
2. $\sinh(x)$ ist ungerade, $\cosh(x)$ ist gerade
3. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
4. Es gelten die Additionstheoreme: $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$, $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

Die Umkehrfunktion sind die sog. Areafunktionen:

$$\text{arsinh}(x)\ \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad \text{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Oft sind auch die Abkürzung Tangens hyperbolicus und Kotangens hyperbolicus in Verwendung:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

2.3 Polynome und rationale Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to R$ der Form

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

heißt Polynom. Die reellen Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ werden die Koeffizienten des Polynoms genannt. Der Grad des Polynoms $\deg(f)$ ist das Höchste j bei dem $a_j \neq 0$. Der Grad ist also der größte vorkommende Exponent. Ein Polynom mit $a_n = 1$ heißt auf eins normiert. a_n wird auch als Leitkoeffizient bezeichnet.

Rechenregeln für den Grad eines Polynoms:

1. $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$
2. $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$
3. Falls $f(x) = 0$, dann ist $\deg(f) = -\infty$

Ein Polynom ist konstant, wenn es vom Grad 0 ist ($f(x) = c(c \in \mathbb{R}$
$\{0\}))$. Jedes nichtkonstante Polynom ist unbeschränkt.

Ein Polynom von Grad 1 heißt lineare Funktion ($f(x) = kx + d$). Ein Polynom von Grad 2 heißt quadratische Funktion ($f(x) = ax^2 + bx + c$). Ein Polynom von Grad 3 heißt kubische Funktion ($f() = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

Eine Stelle x_0, an der $f(x_0) = 0$ ist, heißt Nullstelle der Funktion f. Eine Nullstelle für eine Polynom vom Grad 2 wird folgendermaßen berechnet: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Eine Funktion, die der Quotient zweier Polynome $p(x)$ und $q(x) \neq 0$ ist ($\frac{p(x)}{q(x)}$), heißt rationale Funktion.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra lässt sich jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ in der Form

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) = a_n(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

geschrieben werden. Die Stellen $x_1, \ldots x_n$ sind die Nullstellen von $p(x)$ und $(x - x_j)$ sind die Linearfaktoren von $p(x)$. Ein Polynom von Grad n hat also genau n Nullstellen. Taucht ein Linearfaktor k-mal auf, so heißt k die Vielfachheit der zugehörigen Nullstelle.

Eine Stelle x_0 heißt Polstelle einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{[(x)]}{q(x)}$, falls die Funktion f bei x_0 unbeschränkt ist. Das ist der Fall, wenn

1. $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$ oder

2. $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) = 0$ und die Vielfachheit der Nulstelle des Nenners größer ist als jene des Zählers.

Der Funktionswert an dieser Stelle geht entweder gegen ∞ oder $-\infty$.

2.3.1 Polynomdivision

Teilt man ein Polynom $p(x)$ durch ein Polynom $q(x)$ mit $\deg(q) \leq \deg(p)$, dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, sodass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ ist die Differenz $\deg(s) = \deg(p) - \deg(q)$ und der Grad des Respolynoms $r(x)$ ist kleiner als der des Polynoms $q(x)$.

Example 2.2 Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\left(3x^4 + x^3 \qquad - 2x\right) : \left(x^2 + 1\right) = 3x^2 + x - 3 + \dfrac{-3x+3}{x^2+1} \\
\underline{-3x^4 \qquad - 3x^2} \\
\qquad x^3 - 3x^2 - 2x \\
\qquad \underline{-x^3 \qquad - x} \\
\qquad\quad -3x^2 - 3x \\
\qquad\quad \underline{3x^2 \qquad + 3} \\
\qquad\qquad -3x + 3
\end{array}$$

2.3.2 Nullstellen

eine Stelle x_1 ist eine Nullstelle von $p(x)$, wenn das Polynom $p(x)$ sich ohne Rest durch den Linearfaktor $q(x) = s(x)(x - x_1)$ dividieren lässt.

Komplexe Nullstellen treten immer in komplex konjugierten Paaren auf. Das heißt, für jede komplexe Nullstelle $z_o = x_0 + iy_0$ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ eine Nullstelle. Die Faktoren können auch zusammengefasst werden: $(x - y_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y_0^2$.

2.3.3 Interpolation

Unter Interpolation versteht man die bestmögliche Annäherung einer Funktion mit einem Polynom. Das erfolgt mit Stützpunkten, wobei grundsätzlich eine Erhöhung der Anzahl Stützpunkte die Näherung verbessert. Das ist aber nicht immer der Fall, daher ist die optimale Wahl an Stützpunkten schwierig. Für $n + 1$ Punkte gibt es genau ein Polynom $P_n(x)$ des Grades $\leq n$, dass durch alle Punkte geht. Diese Polynom $P_n(x)$ kann rekursiv berechnet werden:

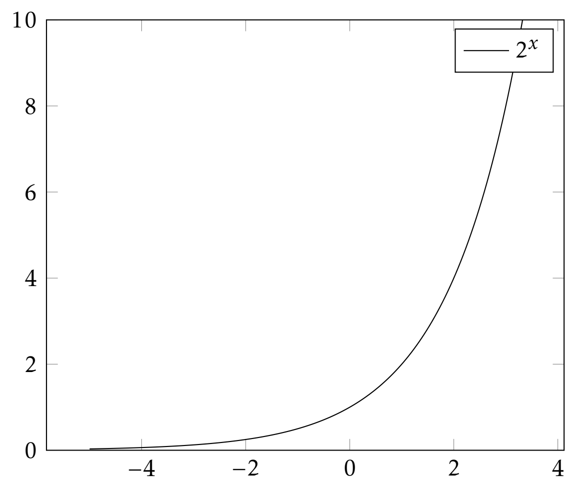
$$P_0(x) = y_0$$

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + (y_{k+1} - P_k(x_{k+1})) \sum_{j=0}^{k} \frac{x - x_j}{x_{k+1} - x_j}$$

Ganz allgemein kann das Polynom mit der Lagrange'sche Interpolationsformel berechnet werden:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (y_k \sum_{j=0, j\neq 0}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j})$$

2.4 Potenz- und Exponentialfunktionen



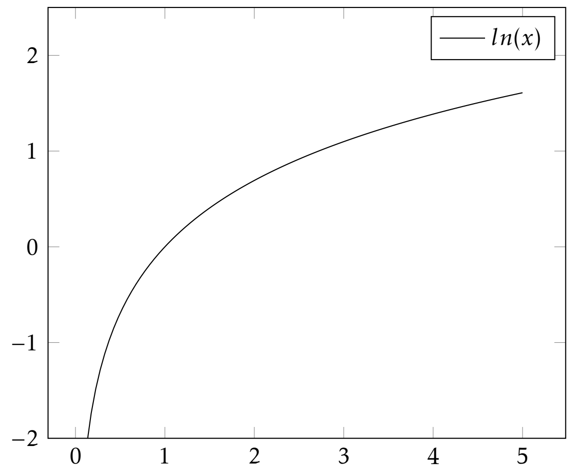
Eine Potenzfunktion ist eine Funktion der Form $f(x) = x^b \quad \text{mit} b \in \mathbb{R}, x > 0$ und eine Exponentialfunktion ist eine Funktion der Form $f(x) = a^x \quad \text{mit} a > 0, x \in \mathbb{R}$.

Exponentialfunktion werden zur Modellierung von Wachstums- oder Zerfallsprozessen (z.B. Wachstum von Bakterienkulturen), und Sättigungsprozessen (Erwärmung von Motoren) genutzt.

2.4.1 Eigenschaften von Exponentialfunktionen

1. Da $a_0 = 1$ gilt, geht jede Exponentialfunktion durch den Punkt (0|1)
2. Exponentialfunktion liegen oberhalb der x-Achse und haben daher keine Nullstellen
3. Jede Exponentialfunktion mit $a \neq 0$ ist unbeschränkt

2.5 Logarithmusfunktion



Gegeben ist eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0, a \neq 1$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ für $x > 0$. Der Logarithmus sucht also den Exponenten x zu der Basis a für den gilt: $a^x = y \iff x = \log_a(y)$. Der Logarithmus zur Basis e wird natürlicher Logarithmus genannt und $\ln(x)$ geschrieben.

2.5.1 Eigenschaften

1. Weil $a^0 = 1$, ist $\log_a(1) = 0$. Die Logarithmusfunktion hat also bei $x = 1$ eine Nullstelle.
2. Die Logarithmusfunktion ist unbeschränkt. $f(x) = \log_a(x)$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend.
3. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$ und $\log_a(x_1 \div x_2) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$
4. $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$
5. $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
6. $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

Chapter 3

Folgen und Reihen

Eine Folge ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Dadurch entstehen die reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die Glieder der Folge genannt werden. Die Zahl n ist der Index der Folge.

Eine Funktion zur Berechnung des n-ten Folgenglieds ist eine explizite Definition bzw. das Bildungsgesetz der Folge. Eine andere Schreibweise ist es das n-te Glied mit Hilfe des $n-1$-ten Glieds zu berechnen. Dies wird rekursives Bildungsgesetz genannt.

Wenn die Folgenglieder abwechselnde Vorzeichen haben, dann spricht man von einer alterierenden Folge.

Wählt man aus einer Folge einen Teil der Folgenglieder aus, der aber immer noch unendlich Folgenglieder hat, so spricht man von einer Teilfolge.

Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ heißt geometrische Reihe (k muss nicht mit 0 beginnen). Für eine Teilsumme einer geometrischen Reihe gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1/q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Folgende Summenformel sind in der praktischen Anwendung effizienter:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1}$$

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

3.1 Eigenschaften

3.1.1 Monotonie

Eine Folge a_n heißt monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n gilt. Wenn statt $\leq$ auch ¡ geschrieben werden kann, dann ist die Folge streng monoton wachsend.

Eine Folge a_n heißt monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n gilt. Wenn statt $\geq$ auch ¿ geschrieben werden kann, dann ist die Folge streng monoton fallend.

3.1.2 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es ein reelles K gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle n. Alle Folgenglieder sind also kleiner gleich K.

Analog heißt eine Folge nach unten beschränkt, wenn ein k existiert, sodass $k \leq a_n$ für alle n. Alle Folgenglieder sind also größer gleich k.

Ist eine Folge sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt, dann wird sie beschränkt genannt.

3.1.3 Konvergenz

Eine Folge a_n heißt konvergent, wenn sie gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert bzw. einen Grenzwert a hat: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Eine komplexe Folge mit den Gliedern $a = x_n + iy + n$ wird als konvergent bezeichnet, wenn sowohl der Realteil, als auch der Imaginärteil konvergiert: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Damit eine Reihe $\sum a_k$ konvergiert, muss a_k eine Nullfolge sein. Konvergiert eine Reihe $s = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, dann nennt man die Reihe absolut konvergent.

Wenn eine Folge a_n konvergiert, konvergieren auch alle Teilfolgen gegen den Grenzwert. Außerdem lässt sich durch die Konvergenz folgern, dass die Folge beschränkt ist.

Eine Folge mit dem Grenzwert 0 wird Nullfolge genannt.

Example 3.1 Nullfolgen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad |q| < 1$$

Für konvergente Folgen a_n und b_n mit den Grenzwerten a und b gelten folgende Rechenregeln:

1. $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a \quad$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad$ für $b \neq 0$

Für konvergente Reihen gelten folgende Rechenregeln:

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(c\dot{a}_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad$ für $c \in \mathbb{R}(\text{oder} c \in \mathbb{C})$
2. $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_l) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Für absolut konvergente Reihen gilt außerdem $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $\quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

Eine geometrische Reihe ist nur für jedes $q < 1$ konvergent. Für den Grenzwert gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Um eine Reihe $\sum a_k$ auf Konvergenz zu untersuchen, kann das Wachstum von dem n-ten Reihenglied zu dem $n+1$-ten Reihenglied berechnet werden. Ist das Wachstum q ab einem Index k_0 zwischen $-1 < q < 1$, dann ist die Reihe konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$$

Gibt es eine zu untersuchende Reihe $\sum a_k$ und eine konvergente Reihe $\sum b_k$ mit $b \geq 0$, sodass $|a_k| \leq b_k$ für alle k ab einem Index k_0, dann konvergiert auch $\sum |a_k|$. Man spricht bei b_k von einem konvergenten Majoranten.

3.1.4 Divergenz

Wenn für eine Folge $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $a_n > 0$ gilt, dann nennt diese Folge bestimmt divergent gegen ∞. Analog heißt eine Folge für die $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $a_n < 0$ gilt, dann ist die Folge divergent gegen $-\infty$.

Für zwei Folgen a_n und b_n, die gegen $\pm\infty$ konvergieren gelten folgende Rechenregeln:

1. $\pm c \cdot \infty = \pm\infty \quad$ für $c > 0$
2. $\pm \cdot (-\infty) = \pm\infty \quad$ für $c > 0$
3. $\frac{c}{\pm\infty} = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$
4. $\infty + \infty = \infty$

5. $-\infty - \infty = -\infty$
6. $\infty \cdot \infty = \infty$
7. $-\infty \cdot \infty = -\infty$
8. $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$

Eine Verknüpfung von a_n und b_n lässt sich nicht ohne weitere Untersuchung vereinfacht werden. Diese sind also unbestimmt:

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Eine geometrische Reihe ist nur divergent wenn $|q| > 1$.

Um eine Reihe $\sum a_k$ auf Divergenz zu untersuchen kann das Wachstum von dem n-ten Reihenglied zu dem $n+1$-ten Reihenglied berechnet werden. Ist das Wachstum q ab einem Index k_0 größer 1 oder kleiner -1, dann ist die Reihe divergent:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$$

Gibt es eine zu untersuchende Reihe $\sum a_k$ und eine divergente Reihe $\sum b_k$ mit $b \geq 0$, sodass $|a_k| \geq b_k$ für alle k ab einem Index k_0, dann divergiert auch $\sum |a_k|$. Man spricht bei b_k von einem divergenten Minoranten.

Chapter 4

Differentialrechnung

4.1 Grenzwert

Der Grenzwert von einer Funktion f für x gegen x_0 wird $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ geschrieben. x_0 muss nicht zwingend im Definitionsbereich D von f liegen. Es ist erlaubt $y_0 = \pm\infty$ zu setzen und man spricht in diesem Fall von bestimmter Divergenz.

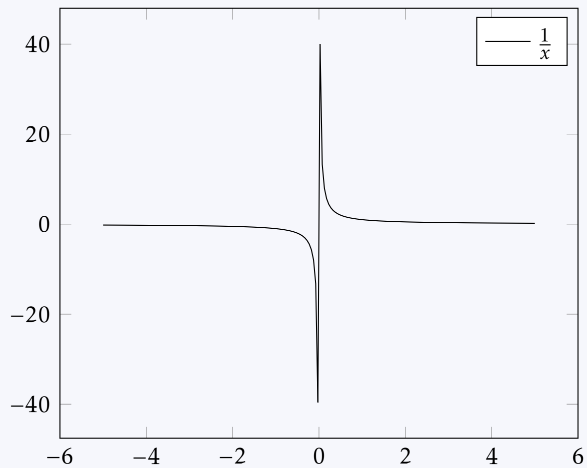
Manchmal ist es notwendig zu unterscheiden, ob man sich dem Grenzwert x_0 von links oder von rechts annähert. Man spricht dann von dem linksseitigen Grenzwert $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ bzw. dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Der Grenzwert existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.

Existiert ein Grenzwert an der Stelle x_0, dann ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig. Ist die Funktion f an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs D stetig, dann ist f stetig. Sind $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetigem dann ist auch die Summe $f(x) + g(x)$, das Produkt $f(x) \cdot g(x)$, der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$, die Verkettung $f(g(x))$ und die Umkehrabbildung $f^-1(x)$ (falls f streng monoton) stetig an der Stelle x_0.

Das verhalten einer Funktion für $x \to \pm\infty$ wird asymptotisches Verhalten genannt.

Example 4.1 Asymptotisches Verhalten

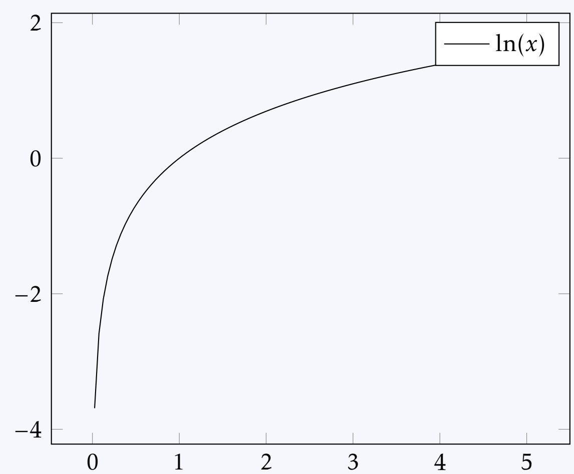
1. Beispiel



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

2. Beispiel



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

4.1.1 Rechenregeln

Sind f und g Funktionen mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, so gilt:

1. $\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a \quad$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$

2. $\lim_{x \to x_0}(f(x \pm g(x))) = a \pm b$
3. $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad$ falls $b \neq 0$

4.1.2 Regel von de l'Hospital

Die Regel von de l'Hospital hilft, wenn der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für x gegen x_0 gesucht ist und wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Ist dies der Fall, dann dürfen $f(x)$ und $g(x)$ unabhängig voneinander abgeleitet werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.2 Nullstellensatz von Bolzano

Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $]a,b[$]. Wir nehmen an, dass $f(a)\dot{f}(b) < 0$ gilt, das heißt, dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben. Dann hat die Gleichung $f(x)$ mindestens eine Lösung $x \in]a,b[$].

4.3 Ableitung

Die Ableitung $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ einer Funktion f gibt die Steigung der Funktion f an der Stelle x_0 an. Um höhere Ableitung darzustellen, kann auch die Schreibweise $f^{(n)}$ für die n-te Ableitung genutzt werden.

Die Idee ist, sich einem Punkt x_0 immer weiter zu nähern $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$. Dadurch entsteht eine Tangente an f durch den Punkt x_0. Die Steigung der Tangente ist gleich der Steigung von f an dem Punkt x_0.

Ist die Annäherung von x an x_0 von links und rechts gleich, also $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$, dann ist f an dem Punkt x_0 differenzierbar.

4.3.1 Ableitungsregeln für elementar Funktionen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	
c	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$a \neq 1, a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln(a)$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	

4.3.2 Ableitungsregeln

Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, dann gilt:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'()$
2. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f(x)$
3. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
4. Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. Quotientenregel: $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
6. Kettenregel: $(f \circ g)(x)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

4.4 Monotonie, Krümmung und Extremwerte

4.4.1 Steigung

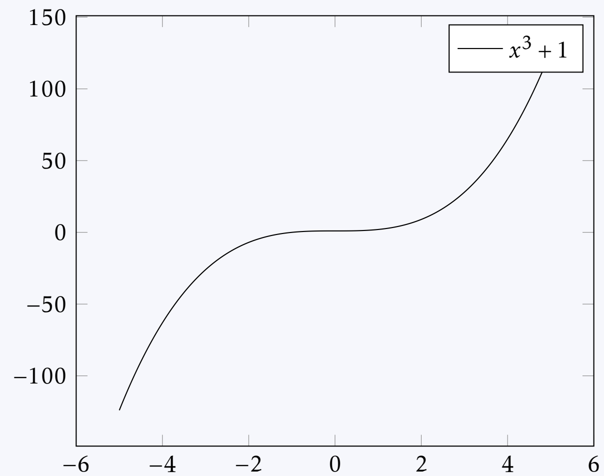
Für die Monotonie einer Funktion f mit $x \in I \subseteq D$ gilt:

$$f'(x) < 0 \iff f \text{ ist monoton fallend in } I$$

$$f'(x) > 0 \iff f \text{ ist monoton wachsend in } I$$

Stimmt dies nur für manche $x \in I$, dann ist die Funktion in dem Teilintervall I streng monoton wachsend/fallend.

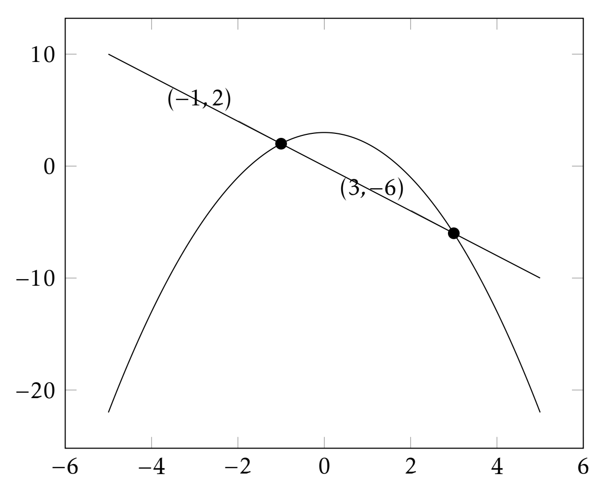
Example 4.2 Monotonie berechnen



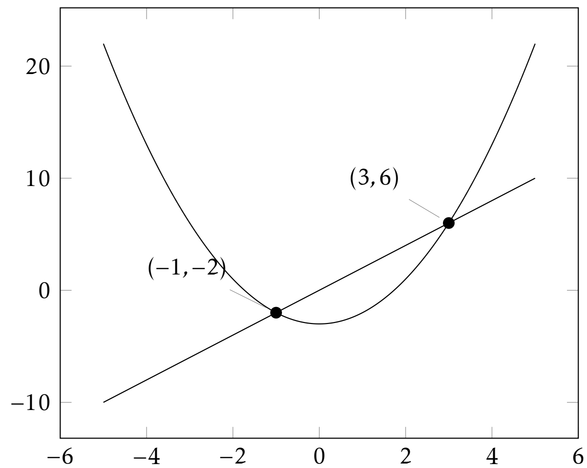
Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2$ also also für alle $x \in D$ positiv. Die einzige Ausnahme ist $x = 0$. Dennoch ist die Funktion streng monoton wachsend.

4.4.2 Konkav, konvex

Eine Funktion heißt konkav (oder rechtsgekrümmt), wenn die Sekante durch zwei Punkte $x_1, x_2 \in I \subseteq D$ unterhalb des Graphen liegen:



Eine Funktion heißt konvex (oder linksgekrümmt), wenn die Sekante durch zwei Punkte $x_1, x_2 \in I \subseteq D$ oberhalb des Graphen liegen:



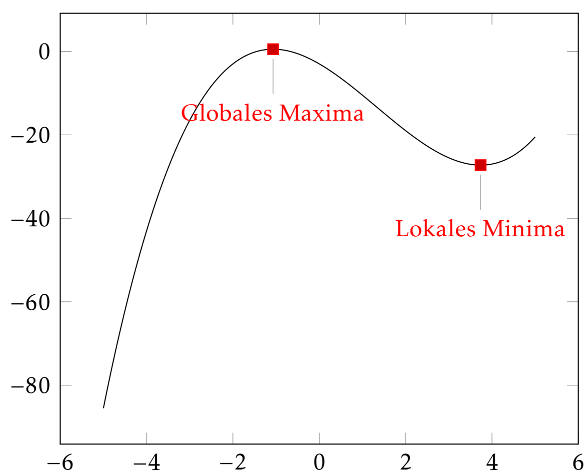
Für die Krümmung von einer Funktion f auf einem Interval $I \subseteq D$ gilt:

$$f \text{ ist konkav auf } I \iff f''(x) \leq 0, \text{ für alle } x \in I$$

$$f \text{ ist konvex auf } I \iff f''(x) \geq 0, \text{ für alle } x \in I$$

4.4.3 Maxima, Minima

Ein globales Maxima oder Minima ist der höchste bzw. niedrigste Punkt einer Funktion f. Ein lokales oder relatives Maxima oder Minima hingegen, ist nur in einem Intervall der höchste bzw. niedrigste Punkt.



Bei einer Extremstelle (x-Wert eines Maxima oder Minima) muss die Steigung 0 sein. Die Extremstellen einer Funktion f können daher berechnet werden durch

$$f'(x) = 0.$$

Die zweite Ableitung gibt dann die Art der Extremstelle an:

$$f''(x_0) > 0 \iff \text{lokales Minimum bei } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \iff \text{lokales Maximum bei } x_0$$

Ist die zweite Ableitung $f''(x_0) = 0$, dann müssen die höheren Ableitungen untersucht werden. Sei $f^{(n)}(x_0)$ die erste Ableitung für die gilt $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ist n gerade, dann ist x_0 eine Extremstelle. Ist n ungerade, dann ist x_0 ein Sattelpunkt.

4.4.4 Wendepunkt

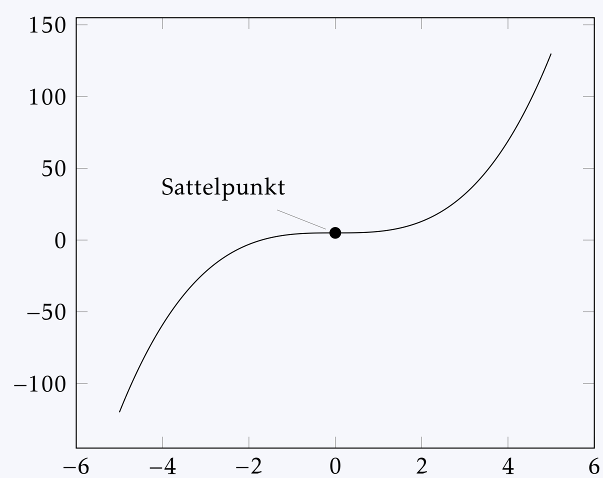
Eine Funktion f besitzt einen Wendepunkt x_0, wenn die Krümmung an dieser Stelle sich ändert. Wendepunkte können berechnet werden durch:

$$f''(x) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \iff x_0 \text{ ist ein Wendepunkt}$$

$$f''(x) = 0, f'''(x_0) \neq 0, f'(x_0) = 0 \iff x_0 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt bei dem die Steigung 0 ist.

Example 4.3 Sattelpunkt



4.4.5 Regula Falsi

Regula Falsi ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen. Die Idee ist, dass zwischen einem Vorzeichenwechsel meistens eine Nullstelle liegt, daher wählt man zwei Punkte x_0, x_1, die ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Anschließend bildet man eine Sekante, die beide Punkte $f(x_0), f(x_1)$ verbindet. Dann berechnet man die Nullstelle dieser Sekante, welcher der nächste x-Wert (also x_2) ist. Die nächste Iteration startet dann mit dem Wert x_2 und x_1, wenn diese unterschiedliches Vorzeichen haben oder startet mit x_2 und x_0, wenn diese unterschiedliches Vorzeichen haben. Diesen Prozess wiederholt man immer weiter und nähert sich dadurch garantiert immer mehr der Nullstelle von f.

Lässt man das Überprüfen des Vorzeichens weg, dann findet man nicht garantiert eine Nullstelle, allerdings wird das Verfahren leichter. Dieses Verfahren wird Sekantenverfahren genannt.

Die durch das Sekantenverfahren entstehende Folge kann berechnet werden durch:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

4.4.6 Newton Verfahren

Das Newton Verfahren ist ein weiter iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen. Es ist im Prinzip gleich zu Regula Falsi, allerdings nutzt es nicht Sekanten, sondern Tangenten. Dadurch nähert man sich schneller einer Nullstelle, aber der Startwert x_0 muss in der Nähe von der Nullstelle sein.

Die daraus entstehende Folge kann berechnet werden durch:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

4.4.7 Kontraktionsprinzip

Eine Funktion ist eine Kontraktion, wenn gilt $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$. Das heißt, wenn sich der x-Wert von x_1 zu x_2 um 1 zunimmt, dann nimmt der y-Wert um weniger als 1 zu.

Ein Fixpunkt $\overline{x}$ ist eine Lösung zu der Gleichung $f(x) = x$. Der Fixpunktsatz von Banach sagt aus, dass wenn ein Fixpunkt auf einer Funktion existiert, die Folge x_n mit dem Startwert $x_0 \in [a, b]$ gegen den Fixpunkt geht. Ein Fixpunkt ist der Schnittpunkt von $f(x)$ und $g(x) = x$, also $f(x) = x$. Mehr Details zu dem Verfahren hier.

4.5 Taylorreihen

4.5.1 Taylorpolynom

Mit Taylorpolynomen kann man eine Annäherung für eine Funktion berechnen. Die Annäherung ist nur in der Nähe von x_0 genau. Wir nähern eine Funktion $f(x)$ für x nahe an den Punkt x_0 durch ein Taylorpolynom des Grades n mit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

an. Je höher der Grad, desto genauer ist die Annäherung um x_0.

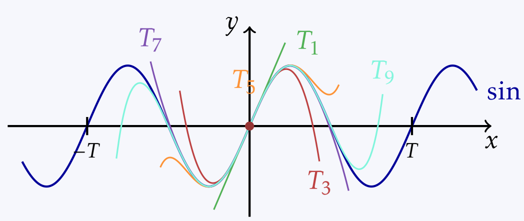
Für die Werte $a_1, \ldots, a_n$ gilt: $T_n^(k)(x_0) = a_k \cdot k!$, also $a_k = \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!}$. Das liegt daran, dass durch die Ableitung die Teile des Polynoms mit einem Grad kleiner als k durch das ableiten wegfallen. Bei dem Teilen des Polynoms mit einem Grad größer als k, bleibt $(x - x_0)$ bestehen. Da wir für x den Wert x_0 einsetzen, fällt auch dieser Teil des Polynoms weg.

Das Taylorpolynom $T_n(x)$ des Grades n an dem Entwicklungspunkt x_0 ist daher:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Um den Entwicklungspunkt zu betonen, kann auch $T_{n,x_0}(x)$ statt $T_n(x)$ geschrieben werden.

Example 4.4 Taylorreihe zur Annäherung von $sin(x)$



4.5.2 Restglied

Da die Taylorreihe nur eine Annäherung ist, existiert eine Differenz zwischen $T_n(x)$ und $f(x)$ $(x \neq x_0)$. Diese Differenz wird das Restglied genannt:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

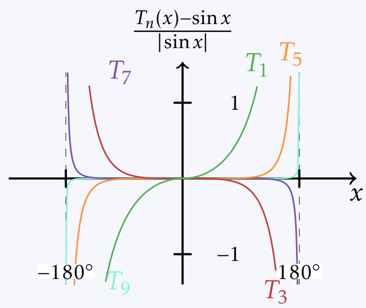
Da es meistens schwer ist $f(x)$ zu berechnen ist diese Formel für das Restglied nicht ideal. Stattdessen wird in solchen Fällen der Fehler abgeschätzt. So gilt für den Fehler

$$|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

C ist eine obere Schranke von $|f^{n+1}(x)|$ in D.

Example 4.5 Restglied der Taylorreihe von $sin(x)$

Der Fehler wird exponentiell größer je weiter x von x_0 weg ist.



Für das Restglied von $T_3(x)$ gilt

$$|R_3(x)| \le \frac{1}{24}|x|^4$$

da die obere Schranke $C = 1$

4.5.3 Taylorreihe

Ist der Grad n unendlich, dann entsteht eine unendliche Reihe

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

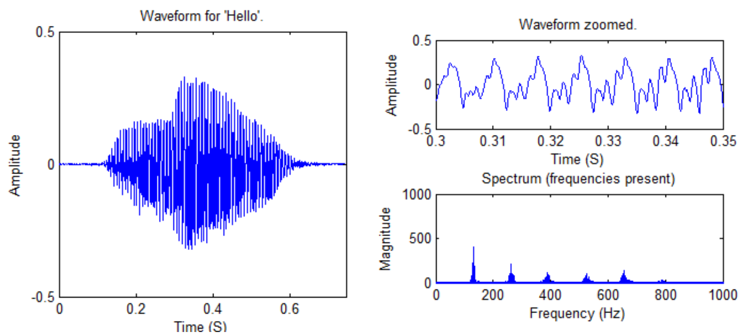
und man spricht von einer Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

//TODO: Konvergenzradius

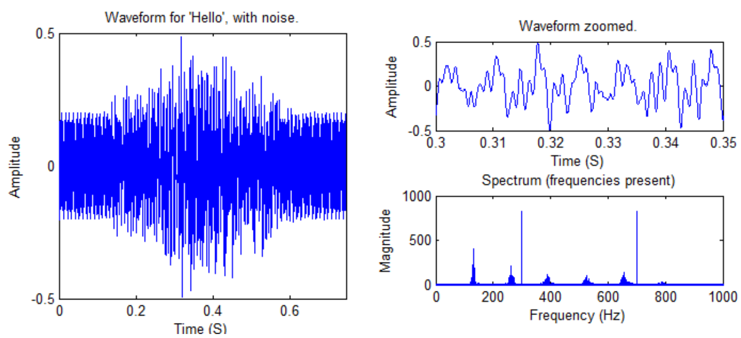
4.6 Fourierreihe

4.6.1 Praktisches Beispiel

Eine Funktion $x(t)$ kann als Signal über die Zeit t interpretiert werden, wie eine Audioaufnahme. Es ist aber manchmal sinnvoller in Frequenzen zu denken. Eine Audioaufnahme kann in verschiedene Frequenzen zerlegt werden. Die Frequenzen für die Audioaufnahme sind in Hz angegeben. Jede Frequenz steht für eine Sinus- und Kosinuskurve und je höher die Frequenz, desto geringer ist die Periode der Kurve. Die Magnitude der Frequenz ist die Stärke der Frequenz und spiegelt die Amplitude der Kurve wieder.



Diese Darstellung ist sehr nützlich, um z.B. Störfrequenzen auszumachen und zu entfernen. In dem Audiobeispiel wurden 2 Störfrequenzen hinzugefügt.



Um die Störfrequenzen zu entfernen werden sie aus dem Frequenzendiagramm entfernt. Danach werden die Kurven der Frequenzen mit ihren Amplituden aufaddiert. Dadurch entsteht das originale Waveform-Diagramm.

Die Stärke der Frequenzen der Audio ist zudem eine deutlich kompaktere Methode, um die Audioaufnahme abzuspeichern. Die Form Daten abzuspeichern wird überall genutzt (z.B. JPEG, MP3, ...). Bei Dateiformaten werden oft noch Informationen entfernt, um die Dateigröße zu reduzieren. Bei MP3 werden z.B. besonders hohe und tiefe Frequenzen entfernt, da die für den Menschen kaum oder gar nicht höhrbar sind.

4.6.2 Mathematische Erklärung

Ein Fourierpolynom ist eine Annährung an eine Funktion $f(t)$. Das Fourrierpolynom (oder auch trigonometrische Polynom) von Grad n ist gegeben durch

$$F_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

mit der Abkürzung $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die Koeffizienten a_k und b_k heißen Fourierkoeffizienten von F_n. Die Periode T ist die Länge des Bereichs, der von $f(t)$ betrachtet wird. Da das Polynom nur aus Kosinus- und Sinuskurven besteht, wiederholt sich das Fourierpolynom immer wieder mit einem Abstand von T. Daher betrachtet man das Intervall von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$. Ist $f(t)$ daher periodisch, dann ist das Fourierpolynom auf ganz $\mathbb{R}$ eine Approximation von $f(t)$.

Die Koeffizienten sind gegeben durch ($k = 0, \ldots, n$)

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) f(t) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega t) f(t) dt.$$

Ist $f(t)$ gerade, so folgt $b_k = 0$ und ist $f(t)$ ungerade, so folgt $a_k = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$.

Die Näherung wird mit wachsendem Grad n auf dem gesamten Approximationsintervall besser. Geht n gegen unendlich, dann konvergiert die Differenz zwischen dem Fourierpolynom und f auf dem Intervall $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$ gegen Null. Man spricht von einer Fourierreihe und schreibt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

4.6.3 Diskrete Fouriertransformation

Oft ist nicht die Funktionsgleichung von $f(t)$ gegeben, sondern nur n Funktionswerte $f(t_k)$, die alle den gleichen Abstand δ_n zu einander haben. Die Zeitpunkte der Funktionswerte sind dann $t_0 = -\frac{T}{2}, \quad t_1 = t_0 + \delta_n, \quad t_2 = t_0 + 2\delta_n, \ldots$ mit $\delta_n = \frac{T}{n}$. Ein Praxisbeispiel sind Seismographen.

Die Koeffizienten können näherungsweise berechnet werden durch

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\omega t_j) f(t_j)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\omega t_j) f(t_j)$$

Die zugehörige Transformation heißt diskrete Fouriertransformation:

$$F_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Chapter 5

Differentialrechnung in mehreren Variablen

Bei der Differentialrechnung mit einer Variable wurde jedem Variablenwert $x \in \mathbb{R}$ ein Wert zugewiesen (wir gehen von einer reellwertigen Funktion f aus):

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x)$$

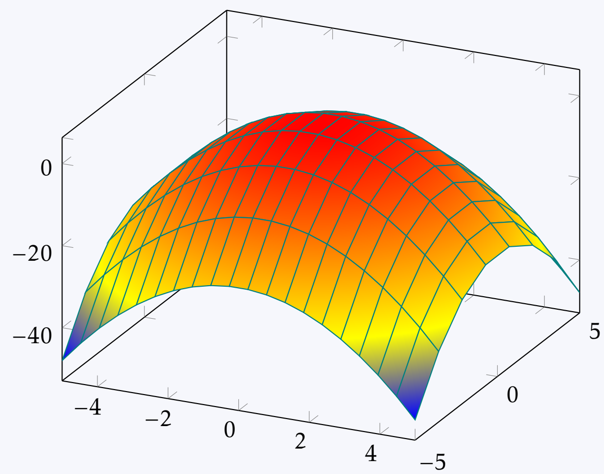
Mit mehreren Variablen, werden mehreren Variablenwerten $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Wert zugewiesen:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

Anstelle von $(x_1, \ldots, x_n)$ wird auch $\mathbf{x}$ geschrieben.

Example 5.1 3-dimensionale Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$. Der Graph dieser Funktion besteht aus den Punkten $\left\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \middle| (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$ und stellt eine Fläche im Raum da:



(Funktionen mit mehr als 3 Dimensionen sind nicht mehr graphisch darstellbar)